# הגדרה

יהי V מ"ו מעל שדה . העתקה לינארית נקראת פונקציונל לינארי.

## דוגמה

כאשר לכל מתקיים כי מתקיים

# הגדרה

אוסף הפונקציונלים נקרא המרחב הדואלי של V ומסומן .

## הערה

הוא מ"ו ביחס לחיבור פונקציונלים וכפל בסקלר של פונקציונל.

# תרגיל 1.5

הוכח שלכל יש כך ש.

## פתרון

[בהנחה שהטענה נכונה ]

יהי . נגדיר . נראה שמתקיים הדרוש:

## הערה

שימו ♥ שאיברי הם גם סקלרים וגם וקטורים (של מעל עצמו)

# תרגיל 1.6

יהי V מ"ו ויהיו כך שלכל המקיים מתקיים . הוכח שיש כך ש.

## הוכחה

מקרה ראשון - נראה שבהכרח ואז נבחר למשל . אחרת, נקבל בת"ל, נשלימה לבסיס B.  
יהי , אזי מוגדר ויחיד ע"פ משפט ההגדרה. מתקיים אבל . סתירה

מקרה שני - ף נוכיח ש ת"ל. נניח בשלילה שהם בת"ל אזי ניתן להשלימם לבסיס ולהגדיר . מוגדר ויחיד ע"פ משפט ההגדרה. סתירה.

לכן תלויים לינארית ולכן קיים צירוף לינארי לא טריויאלי . נראה ש. אחרת, ואז ⇦ , לכן וזה צירוף טריויאלי בסתירה לכך שהצירוף אינו טריויאלי. לכן . נגדיר

# הערה לגבי מבנה פונקציונלים

ראינו בעבר שאם אז כל העתקה לינארית ניתנת לזיהוי  
עם

במקרה שבו הטענה נכונה עד כדי איזומורפיזם.

כעת, במקרה של פונקציונל לינארי ניתן לחשוב על כל פונקציונל שכזה כ עד כדי איזומורפיזם.

כמו כן ניתן לזהות את עם :

# הגדרה+משפט

יהי V מ"ו עם בסיס . אזי קיים בסיס דואלי ל: כאשר

## הערות

1. שימו ♥ שלפי משפט ההגדרה ברגע שכבאני את כרכי על אברי הבסיס B קבענו את בצורה יחידה.
2. אם אזי

# תרגיל 3.3

יהי . יהי בסיס.

1. מצאו בסיס דואלי עבור

## פתרון

לפי הגדרת הבסיס הדואלי נקבל . בנוסף:  
ע"פ הערה לעיל ניתן לזהות את עם מטריצה כך ש:  
באופן דומה ניתן לזהות את עם :   
באופן דומה ניתן לזהות את ונקבל עוד מערכת משוואות. נפתור את כולן בבת אחת:

*מקבלים , לכן*

# תרגיל 3.5

יהי V מ"ו עם בסיס , הבסיס המתאים ו.  
אזי

## הוכחה

יהי ונניח , כלומר . צ"ל .

# תרגיל 3.10

יהא בסיס עבור .

1. מצאו את הבסיס הדואלי בצורה ישירה.

### הערה לפתרון של א'

ניתן לפתור בדיוק כמו תרגיל 3.3 ולקבל

1. מצאו את הבסיס הדואלי בעזרת מטריצת מעבר מתאימה.

## פתרון(לב')

מתקיים . מטריצת מעבר מS לB המקיימת   
. מתקיים , לכן בסה"כ

מקיים ,

מתקיים ⇦

1. יהי . חשבו את

## פתרון(לג')

שימו לב ולכן

#### הראנו ב3.5 ש